Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas
Septiembre-Diciembre 2009

Ejercicios recopilados por el
profesor Mikel De Viana

MA-1121 - Practica 2: semana 2

1. Dado que $\frac{\vec{v_1}-\vec{v_2}}{3} = (2,4)$ y $\frac{\vec{v_2}}{2} = (-1,3)$, halle $\frac{2\vec{v_1}}{3}$
2. Dado que $2\vec{v_1} - \vec{v_2} = (1,-2)$ y $\vec{v_1} + 3\vec{v_2} = (-2,-4)$ halle $\vec{v_1}$ y $\vec{v_2}$
3. Pruebe: $|\vec{v_1}+\vec{v_2}|^2 + |\vec{v_1}-\vec{v_2}|^2 = 2\,|\vec{v_1}|^2 + 2\,|\vec{v_2}|^2$
4. Encuentre un vector que forme un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ con el vector $2\mathbf{i}+\mathbf{j}$ y uno de longitud $\sqrt{13}$ que sea perpendicular a $3\mathbf{i}+2\mathbf{j}$
5. Probar: $(\vec{v_1}+\vec{v_2}) \bullet (\vec{v_1}-\vec{v_2}) = (|\vec{v_1}|+|\vec{v_2}|)\cdot(|\vec{v_1}|-|\vec{v_2}|)$
6. Demuestre que si $\vec{v}$ es perpendicular a $\vec{v_1}$ y a $\vec{v_2}$ entonces será perpendicular a $c_1\vec{v_1}+c_2\vec{v_2}$, para cualquier par de números reales c_1 y c_2.
7. Pruebe la siguiente fórmula para el seno del ángulo ϕ que forman $\vec{v_1} = (a_1,a_2)$ y $\vec{v_2} = (b_1,b_2)$:
$$\operatorname{sen}\phi = \frac{|a_1\cdot b_2 - a_2\cdot b_1|}{|\vec{v_1}|\cdot|\vec{v_2}|}$$
8. Pruebe que si m_1 y m_2 son las pendientes de $\vec{v_1}$ y $\vec{v_2}$ respectivamente, m_1 y m_2 distintos de cero, entonces
$$\vec{v_1}\perp\vec{v_2} \quad \text{si y sólo si} \quad m_1 = -\frac{1}{m_2}$$
9. Encuentre la proyección de $\vec{v_1}$ en $\vec{v_2}$ si $\vec{v_1} = 3\mathbf{i}-2\mathbf{j}$ y $\vec{v_2} = 2\mathbf{i}+3\mathbf{j}$. También cuando $\vec{v_1} = 4\mathbf{i}+2\mathbf{j}$ y $\vec{v_2} = 2\mathbf{i}+\mathbf{j}$.
10. Pruebe:
$$|\vec{v_1}\bullet\vec{v_2}| \le |\vec{v_1}|\cdot|\vec{v_2}|$$
$$|\vec{v_1}+\vec{v_2}| \le |\vec{v_1}|+|\vec{v_2}|$$
¿ Bajo cuáles condiciones se tiene la igualdad?
11. Sean $P_1 = (4,-1)$ y $P_2 = (-5,2)$. a) Escriba la ecuación paramétrica de $\overline{P_1P_2}$ b) Encuentre el punto medio de $\overleftrightarrow{P_1P_2}$ c) Escriba la ecuación paramétrica de la recta perpendicular a $\overline{P_1P_2}$ por el punto medio de $\overleftrightarrow{P_1P_2}$.
12. Halle x tal que los puntos $(x,3);(-4,2);(3,5)$ sean colineales.
13. Sea $P_1 = (2,-4)$ y $P_2 = (-1,3)$. Encuentre P_3 tal que $\overline{P_1P_2}\perp\overline{P_2P_3}$ y $\left|\overleftrightarrow{P_2P_3}\right| = 5$.

14. Halle el punto C en el segmento que une a $A(-3,2)$ con $B(6,9)$ tal que $\frac{\left|\overleftrightarrow{AC}\right|}{\left|\overleftrightarrow{CB}\right|} = \frac{4}{7}$.
15. La suma de las distancias de un punto interior de un triángulo equilátero a sus tres lados es constante.
16. Determine si el triángulo con vértices $A(1,2);\ B(-2,4);\ C(0,-3)$ es recto, isósceles, equilátero o ninguno de estos. Haga lo mismo con el triángulo de vértices $A(-1,0);\ B(3,0);\ C(1,2\sqrt{3})$.
17. Demuestre que las medianas de un triángulo coinciden en un punto situado a dos tercios de la distancia a partir de los vértices.
18. Los puntos medios de los lados de un triángulo son $M_1(3,-2);\ M_2(-1,2);\ M_3(5,4)$. Halle los vértices.
19. Determine si las siguientes rectas son paralelas. Si no lo son, determine el ángulo que forman: $4x-5y=20;\ -12x+15y=-60$. Haga lo mismo con las rectas de ecuaciones $y-2\sqrt{3}x=4$; y $7y-\sqrt{3}x=14$.
20. Halle la distancia desde el punto $P(6,-1)$ a la recta de ecuación $\ell : 4y-6x=9$.
21. Halle las bisectrices de los ángulos que forman las rectas de ecuaciones $3x+y=9$ y $x+3y=9$. Haga lo mismo con las rectas de ecuaciones $3x+4y=12$ y $x+\sqrt{3}y=\sqrt{3}$.
22. Escriba las ecuaciones de las familias de rectas que cumplen con las siguientes propiedades: a) La distancia de la recta al origen es 5. b) El ángulo normal a cada recta es de 210 grados.

Los siguientes son ejercicios de circunferencias. Para realizarlos, recuerde que la circunferencia $\mathcal{S}$ de radio $R>0$ y centrada en el punto $C(h,k)$ se define como el lugar geométrico de todos los puntos del plano cuya distancia con el punto C es igual a R. La circunferencia antes descrita puede ser representada de la siguiente forma:

$$\mathcal{S} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-h)^2+(y-k)^2=R^2\}$$

A la ecuación $(x-h)^2+(y-k)^2=R^2$ se le llama la ecuación estándar de la circunferencia de radio R y centrada en el punto $C(h,k)$.

23. Encuentre la ecuación de la circunferencia con centro $(-\frac{3}{2},\frac{2}{3})$ y radio $\sqrt[3]{4}$.
24. Dados tres puntos no colineales, halle la ecuación de la circunferencia que pasa por ellos.
25. Determine la ecuación de una circunferencia tangente a dos rectas paralelas dadas, digamos L_1 y L_2, y que pase por un punto dado $P(a,b)$.
26. Escriba la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $x^2+y^2+4x-2y-20=0$ en el punto $(-2,-4)$.
27. Halle el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas de igual longitud de una circunferencia.
28. Halle la ecuación de la circunferencia con centro $(3,1)$ y tangente a la recta $3x-2y+6=0$
29. Halle las tangentes a una circunferencia dada $\mathcal{S}$ que contengan al punto $P(a,b)$ exterior a la circunferencia.

30. Encuentre la ecuación de las tangentes a la circunferencia con centro $(7, 11)$ y radio 5 que pasan por el origen. Halle también los puntos de tangencia.

31. Escriba la ecuación de la familia de circunferencias que cumplen con las dos propiedades siguientes:

    a) Sus centros yacen en la linea $x + y = 5$ b) Son tangentes al eje x y a la línea $y = 2x$

32. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $P_1(-1, 1)$, $P_2(2, 3)$ y $P_3(3, -1)$.

33. Halle la ecuación de la familia de circunferencias que contienen los puntos de intersección de $C_1 = 4x^2 + 4y^2 - 4x + 12y - 16 = 0$ y $C_2 = x^2 + y^2 - 8x - 4y + 10 = 0$.

34. Trace por dos puntos dados una circunferencia tangente a una recta dada.

35. Los lados de un triángulo rectángulo miden 60, 80 y 100 centímetros. Encuentre la longitud del segmento que parte desde el vértice con ángulo recto hacia la hipotenusa y tal que divide el triángulo rectángulo en dos triángulos de igual perímetro.